Θεώρημα: (Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης)

Έστω I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση

(οπότε γνωρίζουμε ότι η f γν. μονότονη και το $f(I)$ διάστημα.
Έτσι $f: I \to f(I)$ 1-1 και επί άρα ορίζεται η $f^{-1}: f(I) \to I$.)

Έστω $x_0 \in I$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

α) Αν $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$ και

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

β) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $y_0 = f(x_0)$.

Απόδειξη:

α) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\displaystyle\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $f(I)$ με $y_n \neq y_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ώστε $y_n \to y_0$.

Για κάθε n $y_n = f(x_n)$ για μοναδικό $x_n \in I$

Από την αρχή της μεταφοράς, αφού η f^{-1} είναι συνεχής
$f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$ δηλαδή $x_n \to x_0$.

Έτσι, $$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

[Διότι $\displaystyle\lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$ και $x_n \to x_0$.]

Αποδείξαμε ότι $\displaystyle\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$

Δηλαδή, $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

β) Υποθέτουμε ότι $f'(x_0) = 0$

Αν η f^{-1} ήταν παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας για την $f^{-1} \circ f$, αυτή είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0$

Όμως $(f^{-1} \circ f)'(x) = x \quad \forall x \in I$

άρα $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$. Άτοπο!

Άρα, η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$.

<u>Εφαρμογές:</u>

α) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $f(x) = x^2$

είναι συνεχής, 1-1 και επί με $f'(x) = 2x$.

$y = x^2 \underset{y \geq 0}{\overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow}} x = \sqrt{y}$

Έτσι $f^{-1}: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

Υπολογίζουμε το $(f^{-1})'(y)$ με χρήση του θεωρήματος

→ Για $y = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, άρα η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

→ Για $y > 0$: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{2f^{-1}(y)} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

$y = x^2$ για $x > 0$ Άρα, $f'(x) > 0$.

β) Θεωρώντας γνωστό ότι $(e^x)' = e^x$ Θ.δ.ο. $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ $f(x) = e^x$

f 1-1, επί $f'(x) = \underset{\underset{f(x)}{\parallel}}{e^x} > 0$

Για $y \in (0, +\infty)$

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{f(f^{-1}(y))} = \dfrac{1}{y}$

γ) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^5 + 2x^3 + 4$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Η f είναι 1-1 και επί. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(-1) = 1$	$f^{-1}(1) = -1$
$f(0) = 4$	$f^{-1}(4) = 0$
$f(1) = 7$	$f^{-1}(7) = 1$

→ Για $y=1$ $\quad 1=f(-1)$

$f'(-1)=11\neq 0$

$$(f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{11}$$

→ Για $y=4$ $\quad 4=f(0)$ και $f'(0)=0$

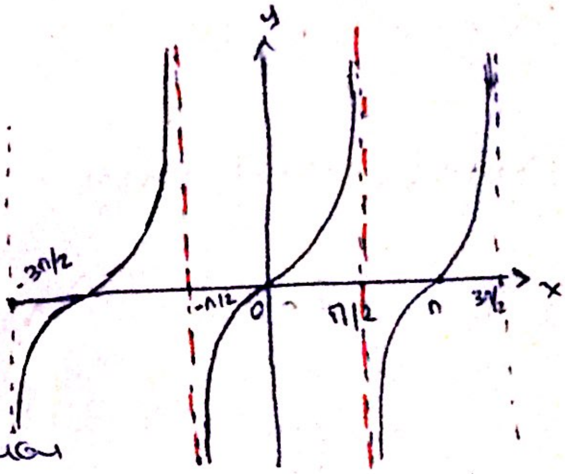
Άρα, η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 4.

→ Για $y=7$ $\quad 7=f(1)$ και $f'(1)=11\neq 0$

Άρα, η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 7

με $(f^{-1})'(7)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{11}$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΟΥΣ



1) Η $\tan : A \to \mathbb{R}$ $\quad A=\mathbb{R}-\{k\pi+\pi/2 \ , k\in\mathbb{Z}\}$

Δεν είναι 1-1

Η $f:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\tan x$

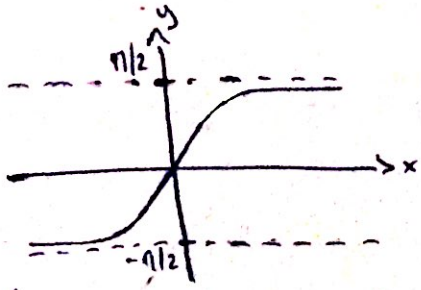
Είναι 1-1 και επί με $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x>0$

Η f αντιστρέφεται και η f^{-1} καλείται συνάρτηση "τόξο εφαπτομένης" και συμβολίζεται $f^{-1}=\mathrm{Arctan}$.

Έστω $y\in\mathbb{R}$ $\ y=f(x)$ για μοναδικό $x\in(-\pi/2,\pi/2)$

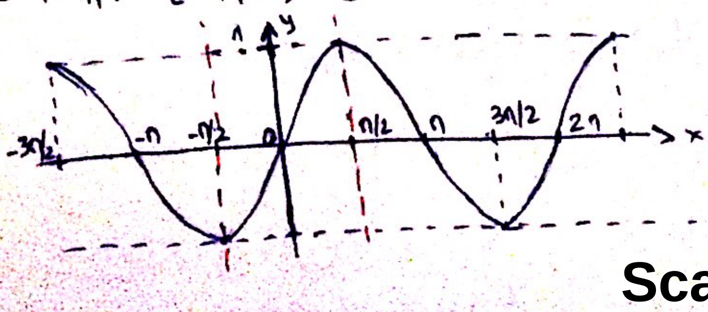
Εφόσον $f'(x)=1+\tan^2 x>0$
$\qquad\qquad = 1+f^2(x)$

η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y.



$$(\arctan)'(y)=(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{1+f(f^{-1}(y))^2}=\frac{1}{1+y^2}$$

2) Η $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ δεν είναι 1-1



Όμως ο περιορισμός της στο $[-\pi/2, \pi/2]$ είναι

$f:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ $f(x)=\sin x$ είναι 1-1 και επί

και $f'(x)=\cos x \geq 0$ $\forall x\in[-\pi/2,\pi/2]$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pi/2$ ή $x=-\pi/2$

Η συνάρτηση τόξο ημιτόνου είναι η $f^{-1}=\arcsin:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$

Η arcsin δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $-1, 1$

(Διότι $f'(-\pi/2)=0$ και $f'(\pi/2)=0$.)

Για $y\in(-1,1)$ υπάρχει μοναδικό $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ ώστε $y=f(x)=\sin x$

και $f'(x)>0$

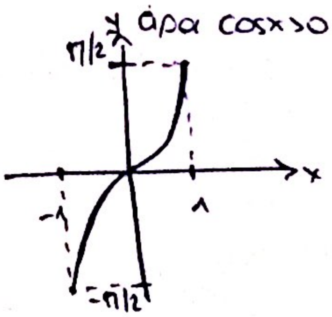
Από το Θεώρημα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο y

$$(\arcsin)'(y)=(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

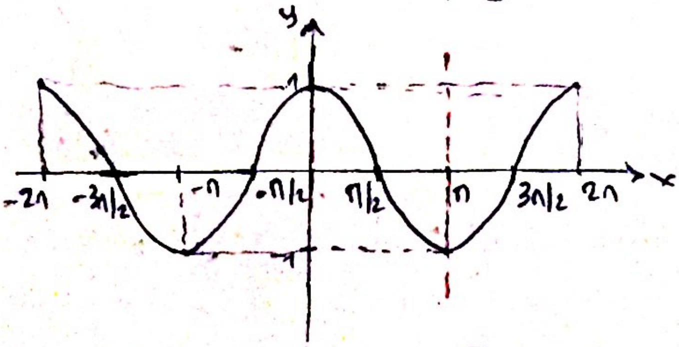
Όμως, $\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x \Rightarrow \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$

$x\in(-\pi/2,\pi/2)$ άρα $\cos x>0$

$\sin 0=0$	$\arcsin 0=0$
$\sin \pi/6=1/2$	$\arcsin 1/2=\pi/6$
$\sin \pi/4=\sqrt{2}/2$	$\arcsin \sqrt{2}/2=\pi/4$
$\sin \pi/3=\sqrt{3}/2$	$\arcsin \sqrt{3}/2=\pi/3$
$\sin \pi/2=1$	$\arcsin 1=\pi/2$



3) Η συνάρτηση $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$ δεν είναι 1-1..



Όμως ο περιορισμός στο $[0,\pi]$ είναι

$f:[0,\pi]\to[-1,1]$ $f(x)=\cos x$ είναι 1-1 και επί

και $f'(x)=-\sin x<0$ $\forall x\in(0,\pi)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ και $x=\pi$ και η f γν. φθίνουσα.

$\arccos = f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$

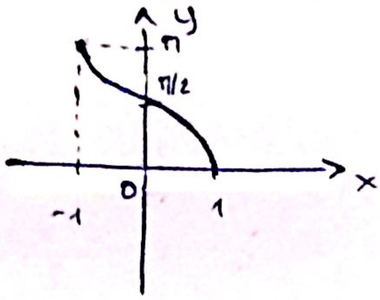
Συνάρτηση "τόξο συνημιτόνου".

Η arccos δεν είναι παραγωγίσιμη στα $-1, 1$.

Για $y \in (-1,1)$ $\quad y = f(x) = \cos x$ για μοναδικό $x \in (0,\pi)$

$$(\arccos)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Όμως, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \overset{\substack{\sin x > 0 \\ x \in (0,\pi)}}{\Longrightarrow} \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$



ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

$f : I \to \mathbb{R}$

f', f'', f'''

$f^{(n)}$ για τη ν-οστή παράγωγο

Αν $f^{(1)} = f'$ $\qquad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

Παρατήρηση: ① Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και αύξουσα τότε $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Απόδειξη:

Έστω $x_0 \in (a,b)$

Τότε $\exists \delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$

$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \overset{x - x_0 > 0}{\Longrightarrow} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Εφόσον $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ έχουμε $f'_+(x_0) \geq 0$

Άρα, $f'(x_0) \geq 0$.

(2) Αν υποθέσουμε ότι $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f'(x)>0 \ \forall x\in(\alpha,\beta)$

Π.χ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα αλλά $f'(0)=0$.

(3) $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(\alpha,\beta)$, f παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)>0$

Τότε $\exists\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(\alpha,\beta)$ και

$f(x)>f(x_0) \ \forall x\in(x_0,x_0+\delta)$

$f(x)<f(x_0) \ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)$

Απόδειξη:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου για $\epsilon=\frac{f'(x_0)}{2}>0$ κ.τ.λ.

Σημείωση: Με τις υποθέσεις της παρατήρησης 3 δεν προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάποιο διάστημα που περιέχει το x_0.

Ορισμός: Έστω $f:I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$, η f παρουσιάζει στο x_0:

α) Τοπικό μέγιστο: Αν $\exists\delta>0$ ώστε $f(x)\leq f(x_0) \ \forall x\in I\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$

β) Τοπικό ελάχιστο: Αν $\exists\delta>0$ ώστε $f(x)\geq f(x_0) \ \forall x\in I\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$

γ) Τοπικό ακρότατο: Αν είναι τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

Θεώρημα Fermat: Έστω I διάστημα, $f:I\to\mathbb{R}$, x_0 εσωτερικό σημείο του I ώστε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

Απόδειξη:

$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

Υποθέτω ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0

Τότε $\exists\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$ και $f(x)\leq f(x_0) \ \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

→ Για $x \in (x_0-\delta, x_0)$ έχουμε $f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0) \leq 0$ και $x-x_0<0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Έτσι: $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow \boxed{f'(x_0) \geq 0}$ (I)

→ Για $x \in (x_0, x_0+\delta)$ έχουμε $f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x)-f(x_0) \leq 0$ και $x-x_0>0$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$

Έτσι: $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow \boxed{f'(x_0) \leq 0}$ (II)

Από (I) και (II) προκύπτει $f'(x_0)=0$.

Αν I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ τα μόνο σημεία στα οποία η f μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο είναι:

- αυτά στα οποία υπάρχει η παράγωγος και μηδενίζεται.
- αυτά στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
- Τα άκρα του I (αν έχει).

<u>Π.χ.</u> $f: [-1,3] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - x$

Ποιά είναι τα ολικά ακρότατα της f;

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Πιθανά σημεία ακροτάτων: $-1, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, 3$

$f(-1) = 0$

$f(-\sqrt{3}/3) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

$f(\sqrt{3}/3) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$f(3) = 24$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 3 με τιμή 24 και ολικό ελάχιστο στο $\sqrt{3}/3$ με τιμή $-2\sqrt{3}/9$.

Θεώρημα Rolle: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

α) f συνεχής στο $[a,b]$

β) f παραγωγίσιμη στο (a,b)

γ) $f(a)=f(b)$

Τότε, $\exists x_0\in(a,b)$ ώστε $f'(x_0)=0$.

Απόδειξη:

1η περίπτωση: f σταθερή, τότε $f'(x_0)=0 \quad \forall x_0\in(a,b)$

2η περίπτωση: f όχι σταθερή, τότε $\exists x_1\in(a,b)$ ώστε $f(x_1)\neq f(a)=f(b)$

α) Αν $f(x_1)>f(a)=f(b)$

Από το Θεώρημα Μέγιστης Τιμής για τη συνεχή f

$\exists x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$

Όμως, $f(x_0)\geq f(x_1)>f(a)=f(b)$ άρα $x_0\neq a, x_0\neq b \Rightarrow x_0\in(a,b)$

Από Θεώρημα Fermat $f'(x_0)=0$.

β) Αν $f(x_1)<f(a)=f(b)$

Από το Θεώρημα Ελάχιστης Τιμής για τη συνεχή f

$\exists x_0\in[a,b]$ ώστε $f(x_0)=\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$

Όμως, $f(x_0)\leq f(x_1)<f(a)=f(b)$ άρα $x_0\neq a, x_0\neq b \Rightarrow x_0\in(a,b)$

Από Θεώρημα Fermat $f'(x_0)=0$.